

**В.П.ОЛЬШАНСКИЙ**, докт. физ.-мат. наук, АГЗУ;  
**С.В.ОЛЬШАНСКИЙ**, НТУ «ХПИ»

## **ЭФФЕКТ ОТРАЖЕНИЯ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ИСПАРЯЮЩИХСЯ КАПЕЛЬ ВСТРЕЧНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА**

Розглянуто рух краплі, що випаровується, як матеріальної точки змінної маси. У припущенні, що сила аеродинамічної взаємодії краплі з газовим середовищем пропорційна квадрату швидкості обтікання, одержано у спеціальних функціях наближені аналітичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь руху. Вивчено ефект відбиття краплі, тобто зміну напрямку її руху, зустрічним газовим потоком.

The movement of a drop is considered which evaporates, as material point of variable weight. In the assumption, that the force of aerodynamic interaction of a drop with gas environment is proportional to a square of speed of a flow, the approached analytical decisions of the nonlinear differential equations of movement are received, in special functions. The effect of reflection of a drop is investigated, that is change of her direction movement, counter gas flow is exacter.

**Актуальность темы.** Нередко на практике движение мелких испаряющихся капель происходит в газовой среде. Это движение частиц топлива при впрыске в цилиндр двигателя внутреннего сгорания [1], частиц жидких огне-тушащих веществ при их подаче в область горения [2, 3] и пр. Если встречная скорость газа большая, то его поток может не только притормозить движение капель, а и поменять направление их движения. В этом суть эффекта отражения. Он оказывает существенное влияние на точность и дальность подачи испаряющихся капель, а поэтому заслуживает отдельного изучения.

Анализ имеющихся публикаций. Отражение твердых мелких частиц встречным потоком газа рассматривалось в работах [4-6]. В них показано, что при наличии такого потока траектории твердых тел могут подгибаться вниз или загигаться вверх. Во втором случае возможно соударение неотраженных частиц с отраженными, что дополнительно тормозит движение и сопутствует их витанию в газе. Но эти закономерности нельзя формально распространить на случай испаряющихся капель, масса которых убывает во времени в связи с испарением. Для частиц переменной массы требуется отдельное изучение процесса движения, о чем и пойдет речь ниже.

Теоретическое моделирование эффекта отражения. Предполагаем, что истечение капли в виде сферы начального радиуса  $r_0$  происходит под углом  $\theta_0$  к горизонту с начальной скоростью  $\vec{v}_0$ .

Проекции скорости истечения имеют значения  $v_1 = v_0 \cdot \cos \theta_0$  и  $v_2 = v_0 \cdot \sin \theta_0$  (см. рис. 1).

По аналогии с работами [2, 3] радиус капли принимаем линейно зависящим от времени, так что  $r(t) = r_0 - \gamma t$ , где  $\gamma$  – скорость испарения.

Считаем, что движение капли происходит навстречу горизонтальному газовому (или воздушному) потоку, который имеет постоянную скорость  $V_1$ . Как и в работах [2, 3], силу аэродинамического воздействия среды на движущуюся части-

цу принимаем пропорциональной квадрату скорости обтекания ее потоком газа.

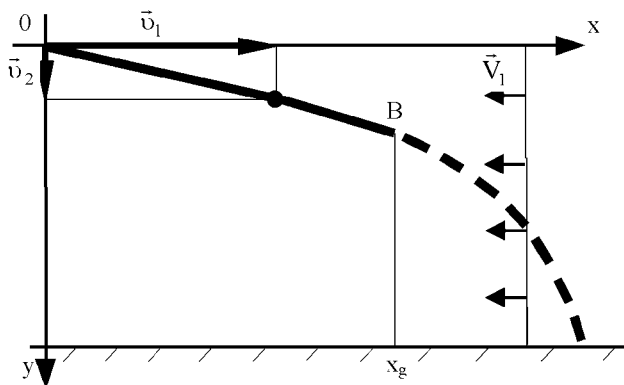


Рисунок 1 – Расчетная схема

В этих предположениях движение капли описывается системой двух связанных нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k(\dot{x} + V_1)}{r_0 - \gamma} [(\dot{x} + V_1)^2 + \dot{y}^2]^{1/2} &= 0; \\ \ddot{y} + \frac{k\dot{y}}{r_0 - \gamma} [(\dot{x} + V_1)^2 + \dot{y}^2]^{1/2} &= g. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $k$  – приведенный коэффициент аэродинамического сопротивления;  $g$  – ускорение свободного падения; точка над символом означает производную по  $t$ .

Уравнения (1) имеют физический смысл лишь при  $t < r_0 \gamma^{-1}$ . При больших  $t$  капля полностью испаряется, т.е. прекращает свое существование, в чем принципиальное отличие ее движения от движения твердой частицы постоянной массы.

Капли обычно имеют большую начальную скорость движения и непродолжительное время полета на траектории. Из-за малого веса частицы, за короткий промежуток времени гравитация не успевает сильно искривить траекторию. Поэтому с небольшой погрешностью, особенно на начальном участке движения, в уравнениях (1) можно принять  $\dot{y}(\dot{x} + V_1)^{-1} \approx \text{const} = v_2(v_1 + V_1)^{-1}$ . В результате такого упрощения система (1) принимает вид

$$\ddot{x}_1 + \frac{\beta \dot{x}_1^2}{r_0 - \gamma} = 0; \quad \ddot{y} + \frac{\beta \dot{x}_1 \dot{y}}{r_0 - \gamma} = g. \quad (2)$$

$$\text{Здесь} \quad \dot{x}_1 = \dot{x} + V_1; \quad \beta = k \left[ 1 + \left( \frac{v_2}{v_1 + V_1} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Кроме уравнений (2) движение капли удовлетворяет начальным условиям

$$\dot{x}_1(0) = v_1 + V_1; \quad \dot{y}(0) = v_2; \quad x_1(0) = 0; \quad y(0) = 0. \quad (3)$$

Первыми интегралами уравнений (2) являются

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (v_1 + V_1) \left[ 1 - \frac{\beta(v_1 + V_1)}{\gamma} \ln \left( 1 - \frac{\gamma t}{r_0} \right) \right]^{-1} - V_1; \\ \dot{y}(t) &= \frac{v_2 + \frac{g}{\gamma} [r_0 + \beta(v_1 + V_1)t]}{1 - \frac{\beta(v_1 + V_1)}{\gamma} \ln \left( 1 - \frac{\gamma t}{r_0} \right)} - \frac{g}{\gamma} (r_0 - \gamma t).\end{aligned}\quad (4)$$

Вторые интегралы удастся выразить с помощью табулированной интегральной показательной функции  $Ei(-x)$ , благодаря выражению [7]

$$\int_0^u \frac{e^{-\mu x} dx}{x + \omega} = e^{\mu\omega} [Ei(-\mu u - \mu\omega) - Ei(-\mu\omega)].$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{r_0}{\beta} e^{\omega} \left[ Ei \left( -\omega - \ln \frac{r_0}{r_0 - \gamma t} \right) - Ei(-\omega) \right] - V_1 t; \\ y(t) &= \frac{1}{v_1 + V_1} \left[ v_2 + \frac{(\omega + 1)gr_0}{\omega\gamma} \right] [x(t) + V_1 t] + \frac{gr_0^2}{\gamma^2} \times \\ &\times \left\{ e^{2\omega} \left[ Ei(-2\omega) - Ei \left( -2\omega - 2 \ln \frac{r_0}{r_0 - \gamma t} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{\gamma t}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \right\}.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь  $\omega = \gamma [\beta(v_1 + V_1)]^{-1}$ .

При  $t = r_0\gamma^{-1}$ , учитывая, что  $Ei(-\infty) = 0$ , для координат конечной точки траектории  $(x_k, y_k)$  находим

$$\begin{aligned}x_k &= -\frac{r_0}{\beta} e^{\omega} Ei(-\omega) - V_1 r_0 \gamma^{-1}; \\ y_k &= \frac{1}{v_1 + V_1} \left[ v_2 + \frac{(\omega + 1)gr_0}{\omega\gamma} \right] \left( x_k + \frac{V_1 r_0}{\gamma} \right) + \frac{gr_0^2}{\gamma^2} \times \left[ e^{2\omega} Ei(-2\omega) - \frac{1}{2} \right].\end{aligned}$$

Практический интерес в пожарном деле представляет вычисление предельно допустимой дальности подачи испаряющихся каплей огнетушащих веществ. Это расстояние, пролетев которое, за счет испарения, капля уменьшает в два раза свой исходный радиус. Чтобы вычислить координаты такой точки  $(x_g, y_g)$  на траектории в формулах (5) следует положить  $t = t_g = r_0(2\gamma)^{-1}$ .

Тогда

$$\begin{aligned}x_g &= \frac{r_0}{\beta} e^{\omega} [Ei(-\omega - \ln 2) - Ei(-\omega)] - \frac{V_1 r_0}{2\gamma}; \\ y_g &= \frac{1}{v_1 + V_1} \left[ v_2 + \frac{(\omega + 1)gr_0}{\omega\gamma} \right] \left( x_g + \frac{V_1 r_0}{2\gamma} \right) + \frac{gr_0^2}{\gamma^2} \times\end{aligned}$$

$$\times \left\{ e^{2\omega} \cdot [\text{Ei}(-2\omega) - \text{Ei}(-2\omega - 2\ln 2)] - \frac{3}{8} \right\}.$$

Для проведения расчетов нужно иметь таблицы интегральной показательной функции, которые есть в [8, 9] и других справочниках по специальным функциям.

Однако, в интервале  $0 \leq t \leq t_g$ , расчет траектории движения капли можно приближенно провести и без таблиц специальных функций. С целью получения упрощенных решений воспользуемся аппроксимацией типа Паде

$$\ln(1-z) \approx -\frac{z}{1-az}, \quad z \in [0; 0,5], \quad a = 0,557.$$

Заменяя логарифмические функции в (4) их приближениями, после вычисления интегралов

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) dt; \quad y(t) = \int_0^t \dot{y}(t) dt; ,$$

получаем

$$\begin{aligned} x(t) &\approx (v_1 + V_1) \left\{ \frac{br_0}{\gamma(b-a)^2} \ln \left[ 1 + (b-a) \frac{\gamma t}{r_0} \right] - \frac{at}{b-a} \right\} - V_1 t; \\ y(t) &\approx \frac{ac}{b-a} \left\{ \left[ \frac{1}{b-a} \left( \frac{G}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} \right) + \frac{G}{ac} \right] \ln \left[ 1 + (b-a) \frac{\gamma t}{r_0} \right] - \frac{1}{2} \times \right. \\ &\quad \times \left( \frac{\gamma t}{r_0} \right)^2 - \left( \frac{G}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} \right) \cdot \frac{\gamma t}{r_0} \left. \right\} + \frac{gr_0^2}{2\gamma^2} \left[ \left( 1 - \frac{\gamma t}{r_0} \right)^2 - 1 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $b = \frac{\beta \cdot (v_1 + V_1)}{\gamma}$ ;  $c = bgr_0^2\gamma^{-2}$ ;  $G = \frac{r_0}{\gamma} \left( v_2 + \frac{gr_0}{\gamma} \right)$ .

Для проверки точности приближенных решений (6) проведены вычисления  $x(t)$  и  $y(t)$  при  $r_0 = 8 \cdot 10^{-5}$  м;  $\gamma = 10^{-4}$  м/с;  $\theta_0 = 0$ ;  $\beta = 10^{-5}$ ;  $v_0 = 120$  м/с;  $V_1 = 0; 5; 10$  м/с. Результаты расчета записаны в табл. 1. В числителе помещены значения, полученные численным интегрированием уравнений (1) при начальных условиях (3), а в знаменатели – координаты вычисленные по формулам (6). Ввиду слабой зависимости  $y(t)$  от величины  $V_1$  ординаты приведены в табл. 1 только для  $V_1 = 0$ .

Расхождение результатов, полученных двумя способами, незначительны, что подтверждает пригодность формул (6) к проведению технических расчетов в интервале  $0 \leq t \leq t_g$ .

Чтобы найти время  $t_0$ , когда капля будет остановлена встречным потоком газа, приравняем нулю  $\dot{x}(t)$  в выражениях (4). Это даст уравнение, из которого следует, что

$$t_0 = \frac{r_0}{\gamma} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\gamma v_1}{\beta V_1 (v_1 + V_1)} \right) \right].$$

Если  $t_0 < t_g$ , то предельно допустимая дальность полета капль будет ограничена не испарением, а эффектом отражения. Так будет, например, при  $r_0 = 8 \cdot 10^{-5}$  м;  $\gamma = 10^{-4}$  м/с;  $\beta = 10^{-5}$ ;  $v_1 = 120$  м/с;  $v_2 = 0$ ;  $V_1 = 20$  м/с, когда  $t_0 \approx 0,28$  с, а  $t_g = 0,4$  с. Если скорость встречного потока газа  $V_1 = 10$  м/с, то  $t_0 \approx 0,48$  с, что больше  $t_g$ , т.е. эффект отражения не окажет влияния. Таким образом, существует граничная скорость встречного потока  $V_{1r}$ , за пределами которой ( $V_1 > V_{1r}$ ) газ отразит движение капли раньше, чем испарение уменьшит в два раза ее диаметр. Это граничное значение легко оценить по формуле

$$V_{1r} \approx \frac{v_1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4\gamma}{kv_1 \ln 2}} - 1 \right).$$

Таблица 1 – Координаты траектории капли, полученные численным интегрированием уравнений (1) (числители) и по формулам (6) (знаменатели)

t, с	$V_1 = 0, \text{ м/с}$	$V_1 = 5, \text{ м/с}$	$V_1 = 10, \text{ м/с}$	$V_1 = 0, \text{ м/с}$
	Значения x(t), м			y(t), м
0,05	<u>4,46</u>	<u>4,35</u>	<u>4,24</u>	<u>0,01</u>
	4,45	4,34	4,23	0,01
0,1	<u>7,24</u>	<u>6,93</u>	<u>6,62</u>	<u>0,04</u>
	7,23	6,92	6,61	0,04
0,2	<u>10,74</u>	<u>9,98</u>	<u>9,21</u>	<u>0,13</u>
	10,72	9,95	9,18	0,12
0,3	<u>12,95</u>	<u>11,70</u>	<u>10,45</u>	<u>0,27</u>
	12,91	11,66	10,40	0,26
0,4	<u>14,47</u>	<u>12,74</u>	<u>10,99</u>	<u>0,45</u>
	14,43	12,69	10,94	0,43

Для использованных выше исходных данных  $V_{1r} \approx 13,02$  м/с.

С целью анализа процесса движения капли в условиях отражения проведен расчет координат ее траектории при  $r_0 = 10^{-4}$  м;  $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$  м/с;  $k = 10^{-5}$ ;  $v_0 = 130$  м/с;  $\theta_0 = -20^\circ$ ;  $V_1 = 30$  м/с. Вычисленные тремя способами координаты в различные моменты времени представлены в табл. 2. Для принятых исходных данных  $t_0 \approx 0,2$  с, а  $t_g \approx 0,25$  с. В пределах промежутка  $0 \leq t \leq t_g$  все три способа вычислений дают близкие результаты. Наиболее простым из них является расчет по формулам (6).

С момента  $t = 0,2$  с начинается уменьшение координат  $x(t)$  во времени и оно продолжается вплоть до полного испарения капли при  $t = 0,5$  с. Траектория движения оказалась загнутой вверх. Но она может быть и загнутой вниз, в

зависимости от угла истечения капли  $\theta_0$ . Это подтверждают траектории, представленные на рис. 2. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 получены численным интегрированием уравнений (1) при  $\theta_0 = -30^\circ; -20^\circ; -10^\circ; 0^\circ$  и  $10^\circ$  соответственно на интервале  $0 \leq t \leq 0,25$  с. Другие параметры истечения капли сохранялись прежними. Три траектории движения, вследствие проявления эффекта отражения, загнуты вверх, а две – вниз.

Таблица 2 – Координаты траектории капли, вычисленные тремя способами

t, с	Численное интегрирование уравнений (1)		Формулы (5)		Формулы (6)	
	x, м	-y, м	x, м	-y, м	x, м	-y, м
0,01	1,11	0,41	1,11	0,41	1,11	0,41
0,05	4,06	1,61	4,06	1,61	4,06	1,61
0,10	5,93	2,57	5,93	2,57	5,91	2,57
0,15	6,77	3,22	6,76	3,22	6,73	3,21
0,20	7,00	3,67	6,99	3,67	6,95	3,66
0,25	6,83	4,00	6,82	4,00	6,77	3,99
0,30	6,38	4,24	6,36	4,23	6,32	4,23
0,35	5,71	4,40	5,68	4,40	5,66	4,39
0,40	4,85	4,51	4,82	4,50	4,84	4,50
0,45	3,83	4,57	3,79	4,56	3,89	4,56

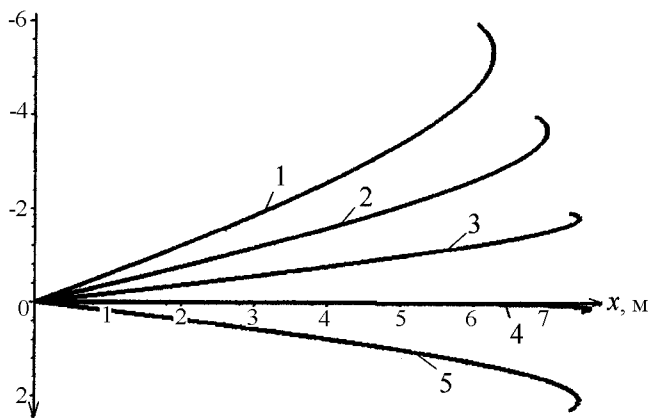


Рисунок 2 – Траектории отражений капли

О характере деформирования траектории можно судить без ее построения по знаку  $\dot{y}(t_0)$ . Если  $\dot{y}(t_0) < 0$ , то траектория загибается вверх, а при  $\dot{y}(t_0) > 0$  она подгибается вниз.

**Выводы.** При наличии встречного потока газа эффективная дальность

полета капли может быть ограничена не ее испарением, а отражением встречным потоком. Это обстоятельство следует учитывать при организации пожаротушения мелкодисперсными жидкими веществами, а также при подаче топлива в цилиндры двигателей внутреннего сгорания.

**Список литературы:** 1. *Лышевский А.С.* Распыливание топлива в судовых дизелях. – Л.: Судостроение, 1971. – 284 с. 2. *Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А.* Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001. – 195 с. 3. *Севериков В.В. Карпенко В.А., Севериков И.В.* Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: Изд-во «СевГТУ», 1996. – 260 с. 4. *Ольшанский В.П.* Об отражении частиц огнетушащего порошка встречным потоком газа // Проблемы пожарной безопасности. – Харьков: Фолио, 2004. – Вып. 16. – С. 164-168. 5. *Ольшанский В.П.* О траектории движения частиц огнетушащего порошка, отраженной встречным потоком газа // Геометрические та комп'ютерне моделювання. Вип. 8. – Харків: ХДУХТ, 2004. – С. 13-18. 6. *Ольшанский В.П., Дубовик О.А.* Вопросы внешней баллистики огнетушащих веществ. – Харьков: Митець, 2005. – 236 с. 7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с. 8. *Абрамович А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

*Поступила в редакцию 22.12.2005.*

УДК 539.3

*А.В.ОНИЩЕНКО, НТУ «ХПИ»*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ УДАРНЫХ НАГРУЗОК**

Досліджується явище накопичення пошкодження в тонкій прямокутній пластині постійної товщини що знаходиться під дією циклічних ударних навантажень. За один цикл приймається однократний удар. Підсумовування пошкоджень вважається лінійним. Задачу удару на кожному циклі розв'язано чисельно-ітераційним методом: визначення величини сили ударної взаємодії проводиться з застосуванням різницевої схеми, визначення деформованого стану пластини виконується аналітично за теорією зсуву Тимошенко. Наведено приклади розрахунків.

The paper is devoted to the investigation of damage accumulation in thin plate with constant thickness, which is under impact loading. The single impact is presented in the one cycle. The linear damage summation is considered. The impact problem on the each cycle is solved by numerical-iterative method: the impact force value was found by use of finite difference scheme, the deformed plate state was determined analytically by shear Timoshenko's theory. The numerical examples are given.

**1. Введение.** Исследование поведения механических конструкций при ударном нагружении является важным этапом прочностных расчетов. В работе [1,2] рассматривается решение задач удара по тонким пластинам. Для использования теории удара предложенной Тимошенко в данных работах аналитически решается задача о колебаниях пластины. С помощью предложенного метода можно оценить